Però la joia de la corona dins aquesta web, que la fa d'una importància extrema, és l'exhaustiva llista de biografies de matemàtics. Tant es pot buscar pel cognom, com per l'any de naixement. Aquí podem consultar les biografies de tots els matemàtics coneguts i de molts de no tan coneguts. Per exemple, aquí podem comprovar que Klein es va casar amb la néta del filòsof Hegel. Aquí podem llegir, per exemple, com Newton va recomanar MacLaurin per a la plaça de professor a la Universitat d'Edimburg. Fets com que el descobridor de la llei d'Ohm (el físic Georg Ohm) tenia un germà matemàtic (Martin Ohm) que va dirigir la tesi de Lipschitz. O també podem aprendre que Jean-Pierre Serre (potser el matemàtic més important viu ara mateix) és nascut als Països Catalans, a Bages, al sud de Perpinyà (Catalunya del Nord).

A la base de dades hi ha vuit Bernoullis, entre ells els famosos germans Jacob i Johann, i a la biografia d'en Johann podem descobrir que, tot i sent de Basel (Basilea, Suïssa), la família Bernoulli era originària d'Àmsterdam i va haver de marxar de Flandes fugint de l'espanyol duc d'Alba, enviat per Felip II a obligar tots els seus súbdits a convertir-se al catolicisme, i els Bernoulli eren protestants. També podem comprovar com Teichmüller va formar part de l'ofensiva que els nazis van llançar l'estiu de 1943 per recuperar posicions a la zona de Kursk (Rússia), després de la desfeta de Stalingrad, i allà morí amb trenta anys.

Òbviament, els matemàtics no viuen completament aïllats de la seva època històrica, però no deixa de ser curiós observar la seva interacció amb els fets històrics coneguts. Un últim exemple: el matemàtic Eugène Catalan, conegut pels nombres que porten el seu nom, va ser nascut a Bruges, que avui dia és a Bèlgica, però que l'any del seu naixement, 1814, formava part de l'imperi francès conquerit per Napoleó i, per tant, en Catalan es va considerar sempre francès, i visqué molts anys a París. Però, per ironies de la vida, Catalan, republicà, es va negar a jurar submissió a l'emperador Napoleó III el 1852, perdé la seva feina, i subsistí uns anys sense feina fixa fent classes particulars, fins que el 1865 agafà una feina a la Universitat de Liège, així tornà al que ja era Bèlgica, a on, havent-hi nascut, era estranger...

Curiositats com aquestes formen part de l'interessantíssima lectura de les biografies de matemàtics, de les quals en podeu trobar uns quants milers al MacTutor Archive. Lectura altament recomanada.

Josep Burillo
UPC

Problemes

Com ja és habitual, hem d'alegrar-nos altra vegada perquè hem rebut solucions a tots els problemes proposats en el número anterior. No només això, sinó que tant novells com veterans estan ben representats en la nòmina de solucionadors.

Agraïm a Miquel Amengual Covas, de Cala Figuera, Mallorca, les seves solucions dels problemes **A85** (solucionat també per Xavi Ros, estudiant a la FME, UPC) i **A87**, i al mateix Xavi Ros les solucions dels problemes **A86** (solucionat també per Joaquim Nadal Vidal, de Cassà de la Selva) i **A88**, així com l'enunciat del problema **A91**. En José Luis Díaz-Barrero, de la UPC, Barcelona, ens proporciona l'enunciat **A92** i també li en donem les gràcies!

El problema **A90** és la generalització a n qualsevol d'un problema proposat, per a $n = 20$, $n = 21$ i $n = 35$ a l'activitat «Fem Matemàtiques 2009» (FEEMCAT) per a alumnes de 2n d'ESO. No s'estan pas de res aquests de la secundària!

Si treballeu amb TEX o LaTEX, ens facilitareu moltíssim la feina d'edició del vostre treball, tot i que aportacions en qualsevol altre format, inclosos els manuscrits, també seran ben rebudes. Les adreces de correu per enviar-nos-les són cromero@xtec.cat o bé carles.romero.c@gmail.com. Fins a la propera!

Problemes proposats

A89. (Proposat per la Redacció.) En un triangle $\triangle ABC$, les bisectrius interiors dels angles A, B i C tallen els costats BC, AC i AB en els punts D, E i F respectivament. Siguin p i q els perímetres respectius dels triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$. Demostreu que $p \geq 2q$. En quines condicions hi ha igualtat?

A90. (Proposat, de manera simplificada, a l'activitat «Fem Matemàtiques 2009» (FEEMCAT) per a alumnes de 2n d'ESO.) Considereu el joc següent: dos jugadors comencen amb $n \geq 2$ fitxes sobre la taula i en van retirant certes quantitats alternativament, tot respectant les dues regles següents: 1) el primer jugador no se les pot endur totes en la primera tirada, i 2) a cada jugada (posterior a la primera) el jugador que té el torn ha de retirar com a mínim una fitxa i com a màxim el doble de les retirades per l'altre jugador en la tirada immediatament anterior. El joc s'acaba quan algú retira l'última fitxa de la taula, i el jugador que se la queda n'és el guanyador.

Estudieu si hi ha alguna estratègia, en funció de n i de si ets primer o segon jugador, que et permeti guanyar sempre.

A91. (Proposat per Xavi Ros Otón, estudiant, FME, UPC.) Sigui $\triangle ABC$ un triangle amb costats a, b i c, i siguin p, S el semiperímetre i l'àrea del triangle i R el radi de la circumferència circumscrita a aquest triangle.

a) Demostreu que $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$.

b) A partir de la desigualtat anterior, demostreu que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p}{S}.$$

Nota: L'apartat *b*) és un refinament del problema 2 proposat a la fase catalana de la XLIII Olimpíada Matemàtica.

A92. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona.) Trobeu totes les ternes (x, y, z) de nombres reals positius que són solució del sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ \dfrac{xy}{xy+z} + \dfrac{yz}{yz+x} + \dfrac{zx}{zx+y} & = & \dfrac{3}{4} \end{array}\right\}.$$

Solucions

A85. (Proposat per Joaquim Nadal Vidal, IES de Cassà de la Selva.) Quatre cercles tenen diàmetres enters i el més gran d'aquests diàmetres és igual a la suma dels altres tres. Els tres cercles petits es poden posar sobre el gran de manera que cadascun dels cercles és tangent als altres tres i, en aquest cas, la part no coberta del cercle gran equival a l'àrea del cercle inscrit en un quadrat de $4.830\,\text{cm}^2$ d'àrea. Trobeu els diàmetres d'aquests quatre cercles.

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.) Siguin d_1, d_2 i d_3 els respectius diàmetres dels tres cercles petits i S el diàmetre del cercle gran. Aleshores, $S = d_1 + d_2 + d_3$.

L'equivalència d'àrees enunciada en el problema s'escriu

$$\pi\,\frac{S^2}{4} - \left(\pi\,\frac{d_1^2}{4} + \pi\,\frac{d_2^2}{4} + \pi\,\frac{d_3^2}{4}\right) = \pi\,\frac{4830}{4}$$

o, equivalentment,

$$S^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + 4.830.$$

En combinar ambdues expressions tenim

$$(d_1 + d_2 + d_3)^2 = S^2 = \\ = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + 4.830.$$

i, en simplificar, resulta

$$d_1d_2 + d_2d_3 + d_3d_1 = 2.415.$$

Així doncs, d'acord amb les *relacions de Cardano*, d_1, d_2 i d_3 són les arrels de la cúbica

$$x^3 - Sx^2 + 2.415x + P = 0 \qquad (1)$$

en la qual $P = d_1d_2d_3$. Observeu que P és un nombre enter perquè d_1, d_2 i d_3 ho són.

D'altra banda, atesa la posició dels quatre cercles quan cadascun és tangent als altres tres, pel *teorema del cercle de Descartes*, el diàmetre del cercle gran és igual a

$$S = \frac{d_1d_2d_3}{2\sqrt{d_1d_2d_3\,(d_1+d_2+d_3)} - (d_1d_2 + d_2d_3 + d_3d_1)},$$

és a dir que

$$S = \frac{P}{2\sqrt{PS} - 2415},$$

relació que escrivim com una equació quadràtica en P:

$$P^2 - 2S\left(2S^2 - 2.415\right)P + (2.415S)^2 = 0, \quad (2)$$

el discriminant de la qual,

$$\Delta = 16S^4\left(S^2 - 2415\right),$$

ha de ser un quadrat perfecte per tal que P, com s'ha dit, sigui un nombre enter. Això imposa que $S^2 - 2.415 = u^2$, amb u un nombre enter.

Si escrivim aquesta equació en la forma $S^2 - u^2 = 2.415$, observarem que el primer membre és una diferència de quadrats i, per tant, es pot posar en la forma $(S+u)(S-u) = 2.415$. Com que $S+u$ i $S-u$ han de ser naturals, poden prendre tants valors com possibles descomposicions en producte de dos factors positius del nombre 2.415 i, com que $2.415 = 3 \cdot 7 \cdot 23$, tenim $2.415 = 2.415 \cdot 1 = 805 \cdot 3 = 483 \cdot 5 = 345 \cdot 7 = 161 \cdot 15 = 115 \cdot 21 = 105 \cdot 23 = 69 \cdot 35$; per trobar els valors de S és suficient resoldre els vuit sistemes:

$$\left.\begin{array}{rcl} S+u &=& 2.415 \\ S-u &=& 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcl} S+u &=& 805 \\ S-u &=& 3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} S+u &=& 483 \\ S-u &=& 5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcl} S+u &=& 345 \\ S-u &=& 7 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} S+u &=& 161 \\ S-u &=& 15 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcl} S+u &=& 115 \\ S-u &=& 21 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} S+u &=& 105 \\ S-u &=& 23 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{rcl} S+u &=& 69 \\ S-u &=& 35 \end{array}\right\},$$

els quals dónen els valors següents per a S:

$$1.208\,,\ 404\,,\ 244\,,\ 176\,,\ 88\,,\ 68\,,\ 64 \ \text{ i } \ 52.$$

Ara, en substituir-los a (2), obtenim els respectius valors admissibles de P següents:

$$1.208\,,\ 3.636\,,\ 6.100\,,\ 8.624\,,\ 19.800\,,$$
$$29.988\,,\ 33.856 \ \text{ i } \ 63.700.$$

Finalment, es comprova que, de tots els parells (S, P),

$$(1.208, 1.208), (404, 3.636), (244, 6.100), (176, 8.624),$$
$$(88, 19.800), (68, 29.988), (64, 33.856), (52, 63.700)$$

l'únic que fa que (1) tingui solucions enteres és $(88, 19.800)$, això és, 15, 33 i 40.

Així, les longituds dels diàmetres demanats són

$$15 \text{ cm}\,,\ 33 \text{ cm}\,,\ 40 \text{ cm} \ \text{ i } \ 88 \text{ cm}.$$

A86. (Proposat per Enric Ventura, UPC, Manresa.) Considereu el conjunt de punts enters del pla, $\mathbb{Z}^2$, i la quadrícula de rectes horitzontals i verticals que els uneix. Trobeu una fórmula explícita que compti la quantitat total de camins que es poden seguir per la xarxa esmentada, començant i acabant a l'origen, i en funció de la seva longitud n (s'entén per longitud d'un camí la quantitat de segments de llargada 1 que travessa, ja siguin horitzontals o verticals, i en qualsevol sentit; per exemple, $\ll\rightarrow, \uparrow, \leftarrow, \leftarrow, \rightarrow, \downarrow\gg$ té longitud 6).

Solució 1: (Solució del proponent.) Un camí per la xarxa bidimensional entera, des de l'origen i de longitud n és simplement una seqüència ordenada de n símbols del conjunt $\{\rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow\}$. El camí serà tancat (és a dir, s'acabarà altre cop a l'origen) si la quantitat total de $\ll\rightarrow\gg$ coincideix amb la quantitat de $\ll\leftarrow\gg$, i la de $\ll\uparrow\gg$ coincideix amb la de $\ll\downarrow\gg$. Per tant, d'entrada, no hi ha cap camí tancat de longitud n senar.

Suposem, doncs, que n és parell i considerem el conjunt de posicions $\mathcal{P} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Siguin $S, T \subset \mathcal{P}$ dos subconjunts tals que $|S| = |T| = \frac{n}{2}$. A partir d'ells, definim $A = S \cap T$, $B = S \setminus (S \cap T)$, $C = T \setminus (S \cap T)$ i $D = \mathcal{P} \setminus (S \cup T)$. I, començant a l'origen, considerem ara el camí γ de longitud n que consisteix a posar $\ll\rightarrow\gg$ a les posicions de A, $\ll\leftarrow\gg$ a les de D, $\ll\uparrow\gg$ a les de B i $\ll\downarrow\gg$ a les de C. Com que

$$|B| = |S \setminus (S \cap T)| = \frac{n}{2} - |S \cap T| = |T \setminus (S \cap T)| = |C|$$

i

$$|A| = |S \cap T| = \frac{n}{2} - |B| = \frac{n}{2} - |C| = |D|$$

és clar que el camí γ és tancat. Aquesta construcció dóna, doncs, una aplicació $(S, T) \mapsto \gamma$ del conjunt de parelles ordenades (S, T) de subconjunts de $\mathcal{P}$ de cardinal n, al conjunt de camins tancats de longitud n. Pensant un moment, es veu que és injectiva. I també exhaustiva.

Per tant, hi ha tants camins tancats de longitud n com parelles ordenades de subconjunts de $\mathcal{P}$ de cardinal n. És a dir,

$$\binom{n}{\frac{n}{2}}^2.$$

Solució 2: (Solució de Xavi Ros Otón, estudiant, FME, UPC.)

Entendrem un camí a $\mathbb{Z}^2$ com un vector $(c_1, \ldots, c_n)$ amb $c_i \in \{\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow\}$. Siguin n_1, n_2, n_3 i n_4 el nombre de c_i que són $\uparrow$, $\downarrow$, $\leftarrow$ i $\rightarrow$ respectivament. Notem que $n_1+n_2+n_3+n_4 = n$, i si volem que el camí acabi al mateix punt en què comença, $n_1 = n_2$ i $n_3 = n_4$ (i, per tant, n ha de ser parell).

Fixat k, si $n_1 = k$, aleshores $n_2 = k$ i $n_3 = n_4 = \dfrac{n}{2} - k$, i el nombre de camins en què $n_1 = k$ és el nombre de combinacions amb repeticions n_1, n_2, n_3, n_4, és a dir,

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} = \frac{n!}{(k!)^2\left(\left(\frac{n}{2}-k\right)!\right)^2}.$$

Així, doncs, el nombre total de camins serà zero si n és senar i

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n/2} \frac{n!}{(k!)^2\left(\left(\frac{n}{2}-k\right)!\right)^2} &= \\ &= \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{n/2}\binom{n/2}{k}^2 = \\ &= \binom{n}{n/2}\sum_{k=0}^{n/2}\binom{n/2}{k}^2 = \\ &= \binom{n}{n/2}^2\end{aligned}$$

si n és parell, on hem usat que $\displaystyle\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}^2 = \binom{2t}{t}$.

En el cas més general de camins a $\mathbb{Z}^r$, s'obté un resultat similar: el nombre de camins és zero si n és senar i

$$\begin{aligned}&\sum_{n_1+\cdots+n_r=n/2} \frac{n!}{(n_1!)^2\cdots(n_r!)^2} = \\ &= \binom{n}{n/2}\sum_{n_1+\cdots+n_r=n/2}\binom{n/2}{n_1,\ldots,n_r}^2\end{aligned}$$

si n és parell, on els termes $\displaystyle\binom{m}{m_1,\ldots,m_r}$ són els coeficients multinomials.

A87. (Proposat per Xavi Ros Otón, estudiant, FME, UPC.) Si A, B i C són els angles d'un triangle, proveu que

$$0 < \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2.$$

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.) Designarem els tres costats de $\triangle ABC$ per a, b i c. Es representarà per R el radi de la circumferència circumscrita al triangle, per r el radi de la circumferència inscrita i s serà el semiperímetre.

Atès que $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{s}{R}$ i que $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{R+r}{R}$, es tracta de provar que

$$0 < \frac{s}{R+r} < 2.$$

La desigualtat de l'esquerra és clara. Per provar la de la dreta, escrivim s, r i R en funció de $x = s-a$, $y = s-b$ i $z = s-c$. Observeu que x, y i z són nombres positius i representen els segments que la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$ determina sobre els seus costats.

Obtenim

$$\begin{aligned}s &= x+y+z \\ r &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}} \\ R &= \frac{abc}{4rs} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}.\end{aligned}$$

Amb la substitució indicada, la desigualtat $\dfrac{s}{R+r} < 2$, que és equivalent a $\dfrac{s}{2} < R+r$, s'escriu

$$\begin{aligned}\frac{x+y+z}{2} &< \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}} + \\ &+ \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}\end{aligned}$$

o, el que és el mateix,

$$\begin{aligned}&2(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)} < \\ &\quad < (x+y)(y+z)(z+x) + 4xyz,\end{aligned}$$

de la qual, elevant al quadrat, en resulta

$$\begin{aligned}&4xyz(x+y+z)^3 < \\ &\quad < \left[(x+y)(y+z)(z+x) + 4xyz\right]^2,\end{aligned}$$

equivalent a l'anterior.

Tot substituïnt $(x+y+z)^3$ per $x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)$, desenvolupant el quadrat i simplificant, obtenim

$$\begin{aligned}&4xyz\left(x^3+y^3+z^3\right)+\\&+4xyz(x+y)(y+z)(z+x)<\\&\quad<[(x+y)(y+z)(z+x)]^2+16x^2y^2z^2.\end{aligned}$$

Ara fem la substitució

$$\begin{aligned}&(x+y)(y+z)(z+x)=\\&\quad=\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\{x,y,z\}\\ \alpha\neq\beta}}\alpha^2\beta+2xyz\end{aligned}$$

i simplificam. El resultat és

$$4xyz\left(x^3+y^3+z^3\right)<\left(\sum\alpha^2\beta\right)^2+12x^2y^2z^2$$

i, atès que

$$\begin{aligned}&\left(\sum\alpha^2\beta\right)^2=\sum\alpha^4\beta^2+\\&+2xyz\sum\alpha^2\beta+2\left(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\right)+\\&+2xyz\left(x^3+y^3+z^3\right)+6x^2y^2z^2,\end{aligned}$$

la desigualtat anterior es pot escriure equivalentment en la forma

$$\begin{aligned}&0<\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\in\{x,y,z\}\\ \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha}}\alpha^4(\beta-\gamma)^2+\\&+2\left(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\right)+2xyz\sum\alpha^2\beta+\\&+18x^2y^2z^2,\end{aligned}$$

la qual és clar que és certa.

Vegem, finalment, que els coeficients de l'enunciat, 0 i 2, són els millors:

Si fem tendir c a zero, llavors $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ tendeix a $\dfrac{2R+2R+0}{2}=2R$ i r tendeix a zero. Per tant, la desigualtat

$$\frac{s}{R+r}<2$$

no es pot millorar.

D'altra banda, considerant un triangle en el qual $a+b$ tendeix a c, llavors $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ tendeix a $\dfrac{c+c}{2}=c$, r tendeix a zero i R tendeix a infinit, amb la qual cosa es veu que la desigualtat

$$0<\frac{s}{R+r}$$

tampoc no es pot millorar.

A88. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona.) Sigui $0<\alpha<1$ un nombre real amb $\dfrac{1}{1-\alpha}>k$, $1\leq k\leq n$. Calculeu

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2\alpha^2+n^2}{n^2}\right)^{\frac{k\alpha+n}{n^2}}.$$

Solució: (Solució de Xavi Ros Otón, estudiant, FME, UPC.)

Sigui L el límit que volem calcular, el qual calcularem per tot $\alpha\in\mathbb{R}$.

Si $\alpha\neq 0$, tenim que

$$\log L=\lim_{n\to\infty}\log\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2\alpha^2+n^2}{n^2}\right)^{\frac{k\alpha+n}{n^2}}=$$

$$\begin{aligned}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\alpha+n}{n^2}\log\left(\frac{k^2\alpha^2+n^2}{n^2}\right)=\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k\alpha}{n}\right)\log\left[1+\left(\frac{k\alpha}{n}\right)^2\right]=\\&=\frac{1}{|\alpha|}\int_0^{\alpha}(1+x)\log\left(1+x^2\right)dx=\\&=\frac{1}{|\alpha|}\left[\frac{1}{2}(1+x)^2\log\left(1+x^2\right)-\right.\\&\qquad\left.-\frac{x^2}{2}-2x+2\arctan x\right]_0^{\alpha}=\\&=\frac{1}{2|\alpha|}(1+\alpha)^2\log\left(1+\alpha^2\right)-\frac{|\alpha|}{2}-\\&\qquad-2\mathrm{sign}(\alpha)+\frac{2\arctan\alpha}{|\alpha|}\end{aligned}$$

ja que la funció $(1+x)\log\left(1+x^2\right)$ és contínua i

$$\frac{|\alpha|}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k\alpha}{n}\right)\log\left[1+\left(\frac{k\alpha}{n}\right)^2\right]$$

n'és la *suma de Riemann* associada a la partició $\left\{0,\ldots,\frac{k\alpha}{n},\ldots,\alpha\right\}$.

Per tant,

$$L=\begin{cases}(1+\alpha^2)^{\frac{(1+\alpha)^2}{2|\alpha|}}e^{-\frac{|\alpha|}{2}-2\mathrm{sign}(\alpha)+\frac{2\arctan\alpha}{|\alpha|}} & \text{si } \alpha\neq 0\\ 1 & \text{si } \alpha=0.\end{cases}$$

Comentari: (Redacció)

Si tenim en compte les restriccions de l'enunciat per a α, aleshores $\dfrac{k-1}{n} < \dfrac{k\alpha}{n} < \dfrac{k}{n}$, $1 \le k \le n$, i resulta que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k\alpha}{n}\right)\log\left[1+\left(\frac{k\alpha}{n}\right)^2\right]$$

és una suma de Riemann per a la funció

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x^2)$$

com abans, però ara a l'interval $[0,1]$. Per tant,

$$\log L = \int_0^1 (1+x)\ln(1+x^2)\,dx = \\ = \left[\frac{(x+1)^2}{2}\ln(1+x^2) - 2(x-\arctan x) - \frac{1+x^2}{2}\right]_0^1 = \\ = \ln 4 + \frac{\pi-5}{2}$$

i

$$L = \exp\left(\ln 4 + \frac{\pi-5}{2}\right) = 4\,e^{(\pi-5)/2} \simeq 1.579,$$

amb total coherència amb la solució anterior, si hi prenem $\alpha = 1$.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Tesis

- Oriol Guasch i Fortuny va llegir la seva tesi, dirigida per Ramon Codina Rovira, titulada *Computational aeroacoustics and turbulence modelling of low speed flows using subgrid scale stabilised finite element methods*, el dia 8 de novembre de 2007. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Aquesta tesi aborda la simulació de la generació i propagació de soroll aerodinàmic dins del marc dels mètodes d'elements finits estabilitzats amb subescales. Per tal de fer-ho, es simula tant la dinàmica de fluxos no periòdics i/o turbulents com el camp acústic que aquests generen.

La metodologia d'aeroacústica computacional (CAA) proposada es basa en l'analogia acústica de Lighthill i conceptualment es pot dividir en tres fases. En la primera, es duu a terme una simulació de fluidodinàmica computacional (CFD) per tal de calcular el terme font de soroll aerodinàmic. En el cas d'un flux turbulent, s'acostumen a utilitzar els anomenats *models de remolins grans* (LES), que es basen en convolucionar les equacions de Navier-Stokes amb un filtre passa-baix, i discretitzar-les posteriorment un cop escollit un model de clausura. Tot i tractar-se d'un enfocament molt estès, el LES presenta nombrosos problemes de caire matemàtic, com no permetre distingir clarament els errors que provenen del model físic dels que provenen de l'esquema de discretització numèrica. Com a alternativa al LES per simular fluxos turbulents, en aquesta tesi s'han emprat models d'elements finits estabilitzats mitjançant subescales (SGS). Aquests ofereixen una separació d'escales natural entre aquelles que són resolubles amb la malla discreta utilitzada i aquelles que no són capturables per la malla (subescales o escales de submalla). L'aplicació dels mètodes SGS a les equacions de Navier-Stokes permet plantejar el problema de simulació de la turbulència com un problema numèric més que no pas físic. Combinant resultats de la mecànica estadística de fluids amb resultats de la matemàtica dels mètodes numèrics, la tesi presenta una prova heurística que dóna suport a la idea